

Cours 19

Révision / Exercices sur Formes de Jordan

Forme Jordan: $K = \overline{K}$
Déf. $J_{\lambda, n} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$

Thm si $K = \overline{K}$, alors toute matrice M est semblable à

$$M \sim \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & \\ & J_{\lambda_1, n_{12}} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_1, n_{m_1}} \\ & & & & J_{\lambda_2, n_{21}} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Q: Comment déterminer les λ_i et n_{ij} ?

Astuces:

- $\chi_M(T)$ polynôme caractéristique

$$\chi_M(T) = (T - \lambda_1)^{n_{11} + n_{12} + \dots + n_{1, m_1}} (T - \lambda_2)^{n_{21} + n_{22} + \dots + n_{2, m_2}} \dots$$

$\Rightarrow$ on peut déterminer les $\lambda_i \leftarrow$ racines
et les $\sum_j n_{ij} \leftarrow$ multiplicité
dans $\chi_M(T)$

$$\sum_{j=1}^{m_i} n_{ij} =: \text{taille de la partition } (n_{i1}, \dots, n_{im_i})$$

- Sous-espaces propres

$$E_{\lambda_i} := \ker(M - \lambda_i \cdot \text{Id}) \quad , \quad \dim E_{\lambda_i} = m_i = \frac{\text{longueur de la partition}}{(n_1, \dots, n_m)}$$

$\Rightarrow$ on peut déterminer pour chaque λ_i
le nombre de blocs avec v.p. λ_i
 $\uparrow$
 $\dim E_{\lambda_i}$

• Nilpotence / polynôme minimal

$\mu_M(T) :=$ le polynôme minimal de M

$\hat{=}$ le poly. non nul de degré plus petit
 qui annule M .

Méthode de calcul de $\mu_M(T) =$

Méthode 1° $\text{Id}, M, M^2, M^3, \dots$

on vérifie la première fois que

$\text{Id}, M, M^2, \dots, M^r$ sont lin. dépendants.

Méthode 2° $\forall \lambda_i$ valeurs propres de M

calculer $M - \lambda_i \cdot \text{Id}, (M - \lambda_i \cdot \text{Id})^2, \dots, (M - \lambda_i \cdot \text{Id})^{r_i} = (M - \lambda_i \cdot \text{Id})^{r_i+1}$

premier fois stabilise

alors $\mu_M(T) = \prod_i (T - \lambda_i)^{r_i}$

$\Rightarrow$ On peut déterminer $\forall \lambda_i$.

$$\max_{1 \leq j \leq m_i} \{n_{ij}\}$$

dans la forme Jordan.

En pratique, ces 3 astuces nous permettent de déterminer la forme Jordan (si la matrice n'est pas très grande).

Invariants complets:

- $\chi_M \rightsquigarrow$ les v.p. λ_i

- On calcule la filtration $\forall \lambda_i$:

$$\ker(M - \lambda_i \text{Id}) \subsetneq \ker(M - \lambda_i \text{Id})^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(M - \lambda_i \text{Id})^{r_i} = \dots$$

$\parallel$ $\parallel$
 E_{λ_i} $\ker(M - \lambda_i \text{Id})^\infty$

leur dimensions déterminent la forme de Jordan =

si on a pour λ_1 blocs de Jordan donnés
par la partition $n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1,m_1}$

$$J := \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_1, n_{1,m_1}} \end{pmatrix}$$

$$\ker(J - \lambda_1 \text{Id}) \subset \ker(J - \lambda_1 \text{Id})^2 \subset \ker(J - \lambda_1 \text{Id})^3$$

$$\parallel$$

$$m_1$$

$$\parallel$$

$$m_1$$

$$+ \#\{j \mid n_{1j} \geq 2\}$$

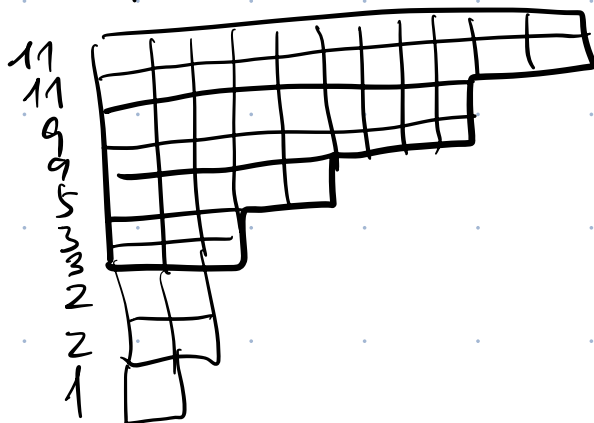
$$\parallel$$

$$m_1$$

$$+ \#\{j \mid n_{1j} \geq 2\}$$

$$+ \#\{j \mid n_{1j} \geq 3\}$$

$$10 < 10 + 9 < 10 + 9 + 7 < 10 + 9 + 7 + 5 < \dots$$



CC1: la suite

$$\left\{ \dim(\ker(J - \lambda_1 \text{Id})^j) \right\}_j$$

$$\parallel$$

$$(0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n)$$

alors $d_1 \geq d_2 - d_1 \geq d_3 - d_2 \geq \dots \geq 0 = 0$

est la transposée de la partition $(n_1, \dots, n_m)$

Produit tensoriel (suite)

Lemme (fonctorialité)

Si $M \in A\text{-Mod}$, $N_1 \xrightarrow{f} N_2$ morphisme de Mod_A

alors on a un morphisme naturellement induit par f :

$$\begin{aligned} N_1 \otimes_A M &\xrightarrow{f \otimes \text{id}_M} N_2 \otimes_A M \\ n \otimes m &\longmapsto f(n) \otimes m \\ \sum_i n_i \otimes m_i &\longmapsto \sum_i f(n_i) \otimes m_i \end{aligned}$$

Preuve: On considère l'app. A -bil. suivante:

$$\begin{aligned} N_1 \times M &\xrightarrow{\phi} N_2 \otimes_A M \\ (n, m) &\longmapsto f(n) \otimes m \end{aligned}$$

vérifier: ϕ est bien A -bilineaire

$$\begin{aligned} (na, m) &\longmapsto f(na) \otimes m = f(n)a \otimes m \\ (n, am) &\longmapsto f(n) \otimes (am) = f(n)a \otimes m \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Propriété universelle $\Rightarrow$

$$N_1 \times M \longrightarrow N_1 \otimes_A M$$

$$\searrow \phi \quad \downarrow \exists! \phi = f \otimes \text{id} \\ N_2 \otimes_A M$$

$$\begin{aligned} (n, m) &\longmapsto n \otimes m \\ &\searrow \phi \quad \downarrow f \otimes \text{id} \\ &\quad f(n) \otimes m \end{aligned}$$

□

Exo (i) Même Lemme pour $M \otimes_A -$

(ii) $(f \circ g) \otimes \text{id} = (f \otimes \text{id}) \circ (g \otimes \text{id})$

$$\text{id} \circ (f \circ g) = (\text{id} \circ f) \circ (\text{id} \circ g)$$

Prop Soit $M \in {}_A \text{Mod}$,

Soit $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte
centrée de Mod_A

Alors par Lemme (fonctoriel), on a une suite

$$0 \rightarrow N' \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes \text{id}} N \otimes_A M \xrightarrow{g \otimes \text{id}} N'' \otimes_A M \rightarrow 0$$

qui est exacte à droite.

Preuve: Surjectivité de $g \otimes \text{id}$:

$$\forall \sum_i n_i'' \otimes m_i \in N'' \otimes_A M$$

par la surjectivité de g , $\exists n_i \in N$ tq $g(n_i) = n_i''$.

Donc

$$(g \otimes \text{id}) \left(\sum_i n_i \otimes m_i \right) = \sum_i g(n_i) \otimes m_i = \sum_i n_i'' \otimes m_i$$

$$\Rightarrow \sum_i n_i \otimes m_i \xrightarrow{g \otimes \text{id}} \sum_i n_i'' \otimes m_i$$

$$\bullet (g \otimes \text{id}) \circ (f \otimes \text{id}) \stackrel{(\text{Exo})}{=} (g \circ f) \otimes \text{id} = 0$$

$$\text{Im}(f \otimes \text{id}) \subset \ker(g \otimes \text{id})$$

$\bullet \forall L \in {}_Z \text{Mod}$, on applique $\text{Hom}_Z(-, L)$

$$0 \rightarrow \underset{\text{|| Centen}}{\text{Hom}_Z(N'' \otimes_A M, L)} \rightarrow \underset{\text{|| Centen}}{\text{Hom}_Z(N \otimes_A M, L)} \rightarrow \underset{\text{|| Centen}}{\text{Hom}_Z(N' \otimes_A M, L)}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N'', L)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/L, L))$$

(Exo) les carrés sont commutatifs)

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0 \text{ exact}$$

$$\Rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, L)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N'', L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', L) \rightarrow 0$$

exact à gauche.

on a une suite exacte à gauche

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N'', L)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/L, L))$$

(cartan)

$$\Rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N' \otimes_A M, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_A M, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N' \otimes_A M, L)$$

est exacte à gauche

(Exo) $\Rightarrow$

$$N' \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow N' \otimes_A M \rightarrow 0$$

est exacte.



Exo: $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ $\otimes$ complexe de A -mod

Si $L \in A\text{-Mod}$

$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', L) \rightarrow \text{Hom}_A(M, L) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_A(M', L)$ est exacte

Alors $\otimes$ est exacte.

Preuve: il s'appelle la propriété universelle du Coker.

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \forall M \xrightarrow{u} L \text{ tq } u \circ f = 0 \\ \exists! \bar{u}: \text{Coker}(f) \rightarrow L \text{ tq } \bar{u} \circ g = u \end{array} \right.$$

i.e.

$$M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

$\searrow \circ$ $\downarrow u$ $\nearrow \bar{u} \exists!$

preuve
on définit

$$\text{Coker}(f) = M / \text{Im}(f) \xrightarrow{\bar{u}} L$$

$$[x] \longmapsto u(x)$$

, c'est bien-définie: si $[x] = [x']$ dans $M / \text{Im}(f)$

$$\Rightarrow x - x' \in \text{Im}(f) \text{ i.e. } \exists y \in M' \text{ tq } x - x' = f(y)$$

$$\Rightarrow u(x) - u(x') = u(x - x') = u(f(y)) = 0$$

$$\forall x \in M, \bar{u} \circ g(x) = \bar{u}([x]) = u(x)$$

$$\text{Donc } \bar{u} \circ g = u$$

• unicité: (Exo) utiliser la surjectivité de g .

$$\begin{array}{ccc}
 M' & \xrightarrow{f} & M \xrightarrow{g} M'' \\
 & & \searrow \pi \quad \begin{array}{c} \text{red } \bar{g} \uparrow \exists! \downarrow \bar{\pi} \end{array} \\
 & & C := \text{oker}(f) = M / I_n(f)
 \end{array}$$

• $g \circ f = 0 \xRightarrow{(P)} \exists! \bar{g} : C \rightarrow M''$
 $\text{tg } \bar{g} \circ \pi = g$

• On utilise l'hypothèse pour
 $\pi \in \text{Hom}_A(M, C)$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_A(M', C) \xrightarrow{f \circ g} \text{Hom}_A(M, C) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_A(M', C) \text{ est} \\
 \exists! \bar{\pi} \longmapsto \pi \longmapsto \pi \circ f = 0
 \end{array}$$

c'est-à-dire $\exists! \bar{\pi} : M' \rightarrow C$
 $\text{tg } \bar{\pi} \circ g = \pi$

Ma $\bar{g} \circ \bar{\pi} = \text{id}_{M'}$, $\bar{\pi} \circ \bar{g} = \text{id}_C$.

On considère

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & C \\
 & & \searrow \pi & \text{red } \text{id}_C \downarrow & \downarrow \bar{\pi} \circ \bar{g} \\
 & & & C &
 \end{array}$$

$$(\overline{\pi} \circ \overline{g}) \circ \pi = \overline{\pi} \circ (\overline{g} \circ \pi) = \overline{\pi} \circ g = \pi$$

unicité dans (P)

$$\overline{\pi} \circ \overline{g} = \text{id}_C$$

(Ex : $\overline{g} \circ \overline{\pi} = \text{id}_{X'}$ = penser à utiliser l'injectivité dans l'hypothèse)



Exo Formuler et prouver que
 $M \otimes_A -$

transforme une suite exacte courte
 en une suite exacte à droite.

Exemples $M \otimes_A -$, $- \otimes_A M$ ne présentent
 pas l'injectivité en générale :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

$$- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$$

$$\implies$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $\mathbb{Z}/2$ $\mathbb{Z}/2$ $\mathbb{Z}/2$